

Approximationsalgorithmen

Marco Ammon

13. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Kombinatorisches Optimierungsproblem ϕ	2
1.1	Definition	2
1.2	Beispiele	2
2	$t(n)$-Zeit-Approximationsalgorithmus A	2
3	Konstante Gütegarantie	2
3.1	Definition	2

1 Kombinatorisches Optimierungsproblem ϕ

1.1 Definition

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \text{Menge der Eingaben } I \\ \mathcal{S}(I \in \mathcal{D}) &= \text{Menge der zur Eingabe } I \text{ zulässigen Lösungen} \\ f : \mathcal{S}(I) &\mapsto \mathbb{N}^{\neq 0} = \text{Bewertungs-/Kosten-/Maßfunction} \\ \text{ziel} &\in \{\min, \max\}\end{aligned}$$

- Beschränkung auf natürliche Zahlen, weil Vergleich reeller Zahlen bislang nicht beweisbar schnell funktioniert.
- Ausschluss der 0 für spätere Definitionen sinnvoll (lässt sich durch Modifikation von f in der Regel trivial erreichen)

Gesucht ist zu $I \in \mathcal{D}$ eine zulässige Lösung $\sigma_{\text{opt}} \in \mathcal{S}(I)$, sodass

$$\text{OPT}(I) = f(\sigma_{\text{opt}}) = \text{ziel}\{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}(I)\}$$

1.2 Beispiele

TODO: TSP, Rucksackproblem, etc.

2 $t(n)$ -Zeit-Approximationsalgorithmus A

Für Eingabe $I \in \mathcal{D}$ berechnet A in Zeit $t(|I|)$ eine Ausgabe $\sigma_I^A \in \mathcal{S}(I)$. Es gilt die Schreibweise $A(I) = f(\sigma_I^A)$.

3 Konstante Gütegarantie

3.1 Definition

- A hat bei Eingabe I absolute Güte von

$$\kappa_A(I) = |A(I) - \text{OPT}(I)|$$

- Die absolute Worst-Case-Güte von A abhängig von der Eingabelänge $n = |I|$ ist die Funktion

$$\kappa_A^{\text{wc}}(n) = \max\{\kappa_A(I) \mid I \in \mathcal{D}, |I| \leq n\}$$

- A garantiert eine absolute Güte von $\kappa_A : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\kappa_A^{\text{wc}} \leq \kappa_A(n)$$

- A hat eine absolute Abweichung von $\kappa'_A : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, falls für unendlich viele n gilt

$$\kappa'_A(n) \leq \kappa_A^{\text{wc}}(n)$$

Eine unendlich große Menge $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ heißt $\kappa'_A(n)$ -Zeugenmenge gegen A , wenn für alle $I \in \mathcal{D}'$ gilt:

$$\kappa_A(I) \geq \kappa'_A(|I|)$$