Approximationsalgorithmen

Marco Ammon

14. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorisches Optimierungsproblem ϕ

1.1 Definition

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{Menge der Eingaben } I \\ \mathcal{S}(I \in \mathcal{D}) &= \text{Menge der zur Eingabe } I \text{ zulässigen Lösungen} \\ f : \mathcal{S}(I) \mapsto \mathbb{N}^{\neq 0} &= \text{Bewertungs-/Kosten-/Maßfunction} \\ \text{ziel} \in \{\min, \max\} & \end{aligned}$$

- Beschränkung auf natürliche Zahlen, weil Vergleich reeller Zahlen bislang nicht beweisbar schnell funktioniert.
- Ausschluss der 0 für spätere Definitionen sinnvoll (lässt sich durch Modifikation von f in der Regel trivial erreichen)

Gesucht ist zu $I \in \mathcal{D}$ eine zulässige Lösung $\sigma_{\text{opt}} \in \mathcal{S}(I)$, sodass

$$\text{OPT}(I) = f(\sigma_{\text{opt}}) = \text{ziel}\{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}(I)\}$$

1.2 Beispiele

TODO: TSP, Rucksackproblem, etc.

2 $t(n)$-Zeit-Approximationsalgorithmus A

Für Eingabe $I \in \mathcal{D}$ berechnet A in Zeit $t(|I|)$ eine Ausgabe $\sigma_I^A \in \mathcal{S}(I)$. Es gilt die Schreibweise $A(I) = f(\sigma_I^A)$.

3 Konstante Gütegarantie

3.1 Definition

- A hat bei Eingabe I absolute Güte von

$$\kappa_A(I) = |A(I) - \text{OPT}(I)|$$

- Die absolute Worst-Case-Güte von A abhängig von der Eingabelänge $n = |I|$ ist die Funktion

$$\kappa_A^{\text{wc}}(n) = \max\{\kappa_A(I) \mid I \in \mathcal{D}, |I| <= n\}$$

- A garantiert eine absolute Güte von $\kappa_A : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\kappa_A^{\text{wc}} \leq \kappa_A(n)$$

- A hat eine absolute Abweichung von $\kappa'_A : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, falls für unendlich viele n gilt

$$\kappa'_A(n) \leq \kappa_A^{wc}(n)$$

  Eine unendlich große Menge $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ heißt $\kappa'_A(n)$-Zeugenmenge gegen A, wenn für alle $I \in \mathcal{D}'$ gilt:

$$\kappa_A(I) \geq \kappa'_A(|I|)$$

3.2 Unmöglichkeitsergebnis für das Rucksackproblem

Satz. *Falls $P \neq NP$, dann gibt es keine Konstante $n \in \mathbb{N}$, sodass es einen polynomiellen Approximationsalgorithmus A für das Rucksackproblem gibt mit*

$$|A(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq k$$

Widerspruchsbeweis. Unter der Annahme, dass A und k existieren, kann RUCKSACK in Polynomzeit exakt gelöst werden, was $P = NP$ zur Folge hat:

Konstruiere aus einer Instanz $I = \langle W, \mathrm{vol}, p, B\rangle$ eine neue Probleminstanz $I' = \langle W, \mathrm{vol}, p', B\rangle$ mit $p'(w) = (k+1) \cdot p(w)$. Eine zulässige Lösung σ für I ist auch eine zulässige Lösung für I'. Gleiches gilt aufgrund der Monotonie der Multiplikation auch für optimale Lösungen. Durch die Multiplikation aller Preise mit $k+1$ beträgt die „Lücke“ zwischen den optimalen und der ersten nicht-optimalen Lösung für I' mindestens $k+1$.

Da A eine absolute Güte von k garantiert und in Polynomzeit terminiert, kann es nur eine optimale Lösung für I', welche auf optimal für I ist, zurückgeben. Damit ist das NP-vollständige RUCKSACK in Polynomzeit exakt lösbar. □

Die hierbei verwendete Vorgehensweise einer Selbstreduktion sowie das „Aufblasen“ des Problems („Scaling“, „Gap Amplification“) lässt sich auch auf viele andere Probleme wie etwa SETCOVER anwenden. Folglich kann eine konstante Gütegarantie nur für vergleichsweise wenig Probleme erreicht werden.

4 Graphfärbbarkeit

4.1 Knotenfärbungsproblem

4.1.1 Definition

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{\langle G\rangle \mid G = (V, E) \text{ ein ungerichteter Graph mit mindestens einer Kante}\} \\
\mathcal{S}(\langle G\rangle) &= \{c_\mathrm{V} \mid c_\mathrm{V} \text{ ist eine Knotenfärbung von } G\} \\
f(c_\mathrm{V}) &= |c_\mathrm{V}(V)| \\
\text{ziel} &= \min
\end{aligned}$$

Die Größe der kleinsten möglichen Knotenfärbung ist die chromatische Zahl $\chi(G)$.

4.1.2 Algorithmen

GreedyCol

for all $u_i \in V$ **do**
  $c_\mathrm{V}(u_i) = \infty$
end for
for all $i \in [1, \ldots, |V|]$ **do**
  $c_\mathrm{V}(u_i) = \min\{\mathbb{N} \setminus \{c_\mathrm{V}(\Gamma(u_i))\}\}$
end for
return c_V

Satz. GREEDYCOL *berechnet in Zeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ eine Knotenfärbung aus höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben.*

Beweis. Da ein Knoten u maximal $\Delta(G)$ viele Nachbarn haben kann, muss in $[1, \ldots, \Delta(G) + 1]$ noch mindestens eine Farbe frei sein. □

Satz. GreedyCol *garantiert eine absolute Güte von*

$$\kappa_{\text{GreedyCol}}(G) = \text{GreedyCol}(G) - \text{OPT}(G) \leq \Delta(G) + 1 - 2 = \Delta(G) - 1$$

, weil die untere Schranke $\text{OPT}(G) \geq 2$ *für Graphen mit* $|V| \geq 2$ *gilt.*

Zeuge. $\Delta(G) - 1$*-Zeuge gegen* GreedyCol*: TODO (Abbildung 2.1)*

4.2 Kantenfärbungsproblem

4.2.1 Definition

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{\langle G \rangle \mid G = (V, E) \text{ ein ungerichteter Graph mit mindestens einer Kante}\} \\
\mathcal{S}(\langle G \rangle) &= \{c_{\text{E}} \mid c_{\text{E}} \text{ ist eine Kantenfärbung von } G\} \\
f(c_{\text{E}}) &= |c_{\text{E}}(E)| \\
\text{ziel} &= \min
\end{aligned}$$

Die Größe der kleinsten möglichen Kantenfärbung ist der chromatische Index $\chi'(G)$.

4.2.2 Algorithmen

TODO: Übung