Approximationsalgorithmen

Marco Ammon

14. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorisches Optimierungsproblem ϕ

1.1 Definition

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \text{Menge der Eingaben } I \\
\mathcal{S}(I \in \mathcal{D}) &= \text{Menge der zur Eingabe } I \text{ zulässigen Lösungen} \\
f : \mathcal{S}(I) \mapsto \mathbb{N}^{\neq 0} &= \text{Bewertungs-/Kosten-/Maßfunction} \\
\text{ziel} \in \{\min, \max\}
\end{aligned}$$

- Beschränkung auf natürliche Zahlen, weil Vergleich reeller Zahlen bislang nicht beweisbar schnell funktioniert.
- Ausschluss der 0 für spätere Definitionen sinnvoll (lässt sich durch Modifikation von f in der Regel trivial erreichen)

Gesucht ist zu $I \in \mathcal{D}$ eine zulässige Lösung $\sigma_{\text{opt}} \in \mathcal{S}(I)$, sodass

$$\text{OPT}(I) = f(\sigma_{\text{opt}}) = \text{ziel}\{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}(I)\}$$

1.2 Beispiele

TODO: TSP, Rucksackproblem, etc.

2 $t(n)$-Zeit-Approximationsalgorithmus A

Für Eingabe $I \in \mathcal{D}$ berechnet A in Zeit $t(|I|)$ eine Ausgabe $\sigma_I^A \in \mathcal{S}(I)$. Es gilt die Schreibweise $A(I) = f(\sigma_I^A)$.

3 Konstante Gütegarantie

3.1 Definition

- A hat bei Eingabe I absolute Güte von

$$\kappa_A(I) = |A(I) - \text{OPT}(I)|$$

- Die absolute Worst-Case-Güte von A abhängig von der Eingabelänge $n = |I|$ ist die Funktion

$$\kappa_A^{\text{wc}}(n) = \max\{\kappa_A(I) \mid I \in \mathcal{D}, |I| <= n\}$$

- A garantiert eine absolute Güte von $\kappa_A : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\kappa_A^{\text{wc}} \leq \kappa_A(n)$$

- A hat eine absolute Abweichung von $\kappa'_A : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, falls für unendlich viele n gilt

$$\kappa'_A(n) \leq \kappa_A^{wc}(n)$$

  Eine unendlich große Menge $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ heißt $\kappa'_A(n)$-Zeugenmenge gegen A, wenn für alle $I \in \mathcal{D}'$ gilt:

$$\kappa_A(I) \geq \kappa'_A(|I|)$$

4 Graphfärbbarkeit

4.1 Knotenfärbungsproblem

4.1.1 Definition

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{\langle G\rangle \mid G = (V, E) \text{ ein ungerichteter Graph mit mindestens einer Kante}\}\\
\mathcal{S}(\langle G\rangle) &= \{c_{\mathrm{V}} \mid c_{\mathrm{V}} \text{ ist eine Knotenfärbung von } G\}\\
f(c_{\mathrm{V}}) &= |c_{\mathrm{V}}(V)|\\
\text{ziel} &= \min
\end{aligned}$$

Die Größe der kleinsten möglichen Knotenfärbung ist die chromatische Zahl $\chi(G)$.

4.1.2 Algorithmen

GreedyCol

for all $u_i \in V$ **do**
  $c_{\mathrm{V}}(u_i) = \infty$
end for
for all $i \in [1, \ldots, |V|]$ **do**
  $c_{\mathrm{V}}(u_i) = \min\{\mathbb{N} \setminus \{c_{\mathrm{V}}(\Gamma(u_i))\}\}$
end for
return c_{V}

Satz. GreedyCol *berechnet in Zeit* $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ *eine Knotenfärbung aus höchstens* $\Delta(G) + 1$ *Farben.*

Beweis. Da ein Knoten u maximal $\Delta(G)$ viele Nachbarn haben kann, muss in $[1, \ldots, \Delta(G) + 1]$ noch mindestens eine Farbe frei sein. □

Satz. GreedyCol *garantiert eine absolute Güte von*

$$\kappa_{\textsc{GreedyCol}}(G) = \textsc{GreedyCol}(G) - \mathrm{OPT}(G) \leq \Delta(G) + 1 - 2 = \Delta(G) - 1$$

, weil die untere Schranke $\mathrm{OPT}(G) \geq 2$ *für Graphen mit* $|V| \geq 2$ *gilt.*

Zeuge. $\Delta(G) - 1$*-Zeuge gegen* GreedyCol*: TODO (Abbildung 2.1)*

4.2 Kantenfärbungsproblem

4.2.1 Definition

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{\langle G\rangle \mid G = (V, E) \text{ ein ungerichteter Graph mit mindestens einer Kante}\}\\
\mathcal{S}(\langle G\rangle) &= \{c_{\mathrm{E}} \mid c_{\mathrm{E}} \text{ ist eine Kantenfärbung von } G\}\\
f(c_{\mathrm{E}}) &= |c_{\mathrm{E}}(E)|\\
\text{ziel} &= \min
\end{aligned}$$

Die Größe der kleinsten möglichen Kantenfärbung ist der chromatische Index $\chi'(G)$.

4.2.2 Algorithmen

TODO: Übung