

Merkzettel für „Theorie der Programmierung“

Marco Ammon

8. Oktober 2018

Termersetzungssysteme

Terminierung

Sei $>$ Reduktionsordnung, und es gelte: $\forall t, s. t \rightarrow_0 s \Rightarrow t > s$. Dann ist \rightarrow stark normalisierend.

Satz 2.31 (15)

Polynomordnungen

Wir definieren $A \subseteq \mathbb{N}$ und für jede n -stellige Operation f ein Polynom $p_f(x_1, \dots, x_n)$. Wenn die linken Seiten der Umformungsregeln $>_A$ den rechten sind, ist das zugehörige TES stark normalisierend.

Kor. 2.44 (18)

Konfluenz

Critical Pairs

- Definition kritisches Paar:
Seien $l_1 \rightarrow_0 r_1$ und $l_2 \rightarrow r_2$ zwei Umformungsregeln des TES sowie $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$ (ggf. nach Umbenennung). Sei $l_1 = C(t)$, wobei t nicht nur eine Variable ist, so dass t und l_2 unifizierbar sind. Sei $\sigma = mgu(t, l_2)$. Dann heißt $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$ ein kritisches Paar.
- Ein TES T ist genau dann lokal konfluent, wenn in T alle kritischen Paare zusammenführbar sind.
- Ein stark normalisierendes und lokal konfluentes TES ist konfluent.

Def. 2.55 (22)

Satz 2.60 (24)

Satz 2.51 (21)

λ -Kalkül

Ungetypt

- β -Reduktion

$$(\lambda x. t)s \rightarrow_\beta t[s/x]$$

- η -Reduktion

$$\lambda x. yx \rightarrow_\eta y$$

- **TODO** α -Äquivalenz

Auswertungsstrategien

- applikativ (*leftmost-innermost*) \rightarrow_a Def. 3.13 (33)
 - $\lambda x.t \rightarrow_a \lambda x.t'$, wenn $t \rightarrow_a t'$
 - $ts \rightarrow_a t's$, wenn $t \rightarrow_a t'$
 - $ts \rightarrow_a ts'$, wenn $s \rightarrow_a s'$ und t normal ist
 - $(\lambda x.t)s \rightarrow_a t[s/x]$, wenn t und s normal sind
 - effizient
- normal (*leftmost-outermost*) \rightarrow_n Def. 3.14 (34)
 - $(\lambda x.t)s \rightarrow_n t[s/x]$
 - $\lambda x.t \rightarrow_n \lambda x.t'$, wenn $t \rightarrow_n t'$
 - $ts \rightarrow_n t's$ wenn $t \rightarrow_n t'$ und t keine λ -Abstraktion ist
 - $ts \rightarrow_n ts'$, wenn $s \rightarrow_n s'$ und t normal und keine λ -Abstraktion ist
 - terminiert immer, falls Normalform existiert (nach Standardisierungssatz) Satz 3.17 (35)

Einfach getypt ($\lambda \rightarrow$)

- Church: Annotation der Variablen mit Typen, nur herleitbare Terme hinschreibbar S. 39
- Curry: Alle Terme hinschreibbar, dann Aussondern der nicht typisierbaren
- Typregeln: S. 39

$$\begin{aligned}
 (Ax) \quad & \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha} \quad x : \alpha \in \Gamma \\
 (\rightarrow_e) \quad & \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s : \alpha}{\Gamma \vdash ts : \beta} \\
 (\rightarrow_i) \quad & \frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \alpha \rightarrow \beta}
 \end{aligned}$$

- Typisierungsprobleme S. 40
 - Typcheck: „Gilt $\Gamma \vdash t : \alpha$?“
 - Typinferenz: „Was ist das beste α / Existiert α mit $\Gamma \vdash t : \alpha$?“
 - Type inhabitation: „Existiert t mit $\Gamma t : \alpha$?“
- Inversionslemma Lem. 3.29 (41)
 1. $\Gamma \vdash x : \alpha \Rightarrow x : \alpha \in \Gamma$
 2. $\Gamma \vdash ts : \beta \Rightarrow \exists \alpha$ mit $\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash s : \alpha$
 3. $\Gamma \vdash \lambda x.t : \gamma \Rightarrow \gamma = \alpha \rightarrow \beta$ mit $\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta$
- Typinferenz S. 41
 - Typsubstitution σ ist Lösung von $\Gamma \vdash t : \alpha$, wenn $\Gamma \sigma \vdash t : \alpha \sigma$ herleitbar
 - Substitutionen: σ_1 allgemeiner als $\sigma_2 \Leftrightarrow \exists \tau. \sigma_1 \tau = \sigma_2$ GLoIn, S. 38
 - Prinzipaltyp von Γ, t ist $\sigma(a)$ für allgemeinste Lösung σ von $\Gamma \vdash t : a$ (a frisch)
 - Algorithmus W (Hindley/Milner) Alg. 3.31 (42)

* Menge PT von Typgleichungen

$$PT(\Gamma; x; \alpha) = \{a \doteq b \mid x : \beta \in \Gamma\}$$

$$PT(\Gamma; \lambda x.t; \alpha) = PT((\Gamma; x : a); t; b) \cup \{a \rightarrow b \doteq \alpha\} \text{ mit } a, b \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma; ts; \alpha) = PT(\Gamma; t; a \rightarrow \alpha) \cup PT(\Gamma; s; a) \text{ mit } a \text{ frisch}$$

* Typinferenz des Terms u mit leerem Kontext:

$$\varepsilon := PT(\emptyset; u; a)$$

$$\Rightarrow \text{Prinzipaltyp von } u: \text{mgu}(\varepsilon)(a)$$

- Subjektreduktion: Wenn $\Gamma \vdash t : \alpha$ und $t \rightarrow_{\beta}^* s$, dann auch $\Gamma \vdash s : \alpha$, aber nicht umgekehrt!

Satz 3.38 (45)

Induktive Datentypen

Mengenkonstruktionen

Def. 4.12 (56)

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in X_i \text{ für } i = 1, 2\} \quad (\text{„struct“})$$

$$X_1 + X_2 = \{(i, x) \mid i = 1, 2, x \in X_i\} \quad (\text{„union“})$$

$$1 = \{*\} \quad \text{„()“ in Haskell}$$

Lem. 4.13 (57)

Seien $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $g_i : X_i \rightarrow Z$ und $h_i : Z \rightarrow X_i$ mit $i \in \{1, 2\}$.

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, \quad (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

$$f_1 + f_2 : X_1 + X_2 \rightarrow Y_1 + Y_2, \quad (f_1 + f_2)(i, x) = (i, f_i(x))$$

$$[g_1, g_2] : X_1 + X_2 \rightarrow Z, \quad [g_1, g_2](i, x) = g_i(x)$$

$$\langle h_1, h_2 \rangle : Z \rightarrow X_1 \times X_2, \quad \langle h_1, h_2 \rangle(z) = (h_1(z), h_2(z))$$

$$in_i : X_i \rightarrow X_1 + X_2, \quad in_i(x) = (i, x)$$

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i, \quad \pi_i(x_1, x_2) = x_i$$

$$1 : 1 \rightarrow 1$$

Es gilt

$$[g_1, g_2] \circ in_i = g_i$$

$$f_1 + f_2 = [in_1 \circ f_1, in_2 \circ f_2]$$

$$[r \circ in_1, r \circ in_2] = r \text{ für } r : X_1 + X_2 \rightarrow Z$$

$$\pi_i \circ \langle h_1, h_2 \rangle = h_i$$

$$f_1 \times f_2 = \langle f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2 \rangle$$

$$\langle \pi_i \circ f, \pi_2 \circ f \rangle = f \text{ für } f : Z \rightarrow X_1 \times X_2$$

Strukturelle Induktion

- über einsortige Datentypen

S. 63

– Induktionsanfang: „Anfangs“-Konstruktor (etwa *Nil*)

– Induktionsschritt: alle anderen Konstruktoren (etwa *cons*)

- über mehrsortige Datentypen

S. 64

– Funktionen müssen immer auf allen Datentypen definiert werden

Kodatentypen

- Definition über „Destruktoren“ etwa hd und tl

Koinduktion

- Bisimulation $R \subseteq A^\omega \times A^\omega$, wenn für alle $(s, t) \in R$ gilt:

Def. 4.39 (74)

$$\begin{aligned} hd\ s &= hd\ t \\ (tl\ s) &R\ (tl\ t) \end{aligned}$$

- Wenn R eine Bisimulation ist, gilt $sRt \Rightarrow s = t$

Satz 4.40 (74)

System F

Curry

- Typen:

Def. 5.1 (84)

$$\alpha, \beta := a \mid \alpha \rightarrow \beta \mid \forall a. \alpha \quad (a \in V)$$

- Typisierung:

Def. 5.1 (84)

$$\begin{aligned} (Ax) \quad & \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha} (x : \alpha \in \Gamma) \\ (\rightarrow_e) \quad & \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s : \alpha}{\Gamma \vdash ts : \beta} \\ (\rightarrow_i) \quad & \frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. t : \alpha \rightarrow \beta} \\ (\forall_i) \quad & \frac{\Gamma \vdash s : \alpha \quad a \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash s : \forall a. \alpha} \\ (\forall_e) \quad & \frac{\Gamma \vdash s : \forall a. \alpha}{\Gamma \vdash s : (\alpha[\beta/a])} \end{aligned}$$

Church-Kodierung

S. 84

- Natürliche Zahlen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \forall a. (a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow a \\ zero &: \mathbb{N} \\ zero &= \lambda f x. x \\ suc &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ suc &= \lambda n f x. f(nfx) \\ fold &: \forall a. (a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow a \\ fold &= \lambda f x n. nfx \\ add &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ add &= \lambda n. fold\ suc\ n \end{aligned}$$

- Paare

$$\begin{aligned}
(a \times b) &:= \forall r. (a \rightarrow b \rightarrow r) \rightarrow r \\
pair &: \forall ab. a \rightarrow b \rightarrow (a \times b) \\
pair &= \lambda xyf. fxy \\
fst &: \forall ab. (a \times b) \rightarrow a \\
fst &= \lambda p. p(\lambda xy. x) \\
snd &: \forall ab. (a \times b) \rightarrow b \\
snd &= \lambda p. p(\lambda xy. y)
\end{aligned}$$

- Summen

$$\begin{aligned}
(a + b) &:= \forall r. (a \rightarrow r) \rightarrow (b \rightarrow r) \rightarrow r \\
inl &: \forall ab. a \rightarrow (a + b) \\
inl &= \lambda xfg. fx \\
inr &: \forall ab. b \rightarrow (a + b) \\
inr &= \lambda yfg. gy \\
case &: \forall abs. (a \rightarrow s) \rightarrow (b \rightarrow s) \rightarrow (a + b) \rightarrow s \\
case &= \lambda fgs. sf g
\end{aligned}$$

- Listen

$$\begin{aligned}
List\ a &:= \forall r. r \rightarrow (a \rightarrow r \rightarrow r) \rightarrow r \\
Nil &: \forall a. List\ a \\
Nil &= \lambda uf. u \\
Cons &: \forall a. a \rightarrow List\ a \rightarrow List\ a \\
Cons &= \lambda xlu f. fx(lu f) \\
len &: \forall a. List\ a \rightarrow \mathbb{N} \\
len &= \lambda l. l\ zero\ (\lambda xr. suc\ r)
\end{aligned}$$

ML-Polymorphie

- Einschränkung von System F durch \forall nur auf oberster Ebene sowie Mehrfachinstanziierung polymorpher Funktionen nur in *let*-Konstrukt

S. 88

- Typen

$$\alpha, \beta := a \mid \alpha \rightarrow \beta$$

- Typschemata

$$S := \forall a_1, \dots, a_k. \alpha \quad (k \geq 0)$$

- Terme

$$t, s := x \mid t\ s \mid \lambda x. t \mid \text{let } x = t \text{ in } s$$

- Kontexte

$$\begin{aligned}
\Gamma &= (x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n) \\
Cl(\Gamma, \alpha) &= \forall a_1, \dots, a_k. \alpha \quad \text{für } FV(\alpha) \setminus FV(\Gamma) = \{a_1, \dots, a_k\}
\end{aligned}$$

- Typisierungsregeln

S. 88

$$(\forall_e) \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha[\beta_1/a_1, \dots, \beta_k/a_k]} (x : \forall a_1, \dots, \forall a_k. \alpha) \in \Gamma$$

$$(\rightarrow_i) \frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. t : \alpha \rightarrow \beta}$$

$$(\rightarrow_e) \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s : \alpha}{\Gamma \vdash ts : \beta}$$

$$(\text{let}) \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \quad \Gamma, x : Cl(\Gamma, \alpha) \vdash s : \beta}{\Gamma \vdash \text{let } x = t \text{ in } s : \beta}$$

- Inversionslemma

S. 89

1. Wenn $\Gamma \vdash x : \alpha$, dann existieren Typen β_i und ein Typschema $S = \forall a_1 \dots \forall a_k. \gamma$, so dass $(x : S) \in \Gamma$ und $\alpha = \gamma[\beta_1/a_1, \dots, \beta_k/a_k]$
2. Wenn $\Gamma \vdash (\text{let } x = s \text{ in } t) : \alpha$, dann existiert ein Typ β mit $\Gamma \vdash s : \beta$ und $\Gamma, x : Cl(\Gamma, \beta) \vdash t : \alpha$

- erweiterter Algorithmus W mit Menge PT von Typgleichungen

$$PT(\Gamma; x; \alpha) = \{a \doteq \gamma[a'_1/a_1, \dots, a'_k/a_k] \mid (x : \forall a_1, \dots, \forall a_k. \gamma) \in \Gamma\}$$

$$PT(\Gamma; \lambda x. t; \alpha) = PT((\Gamma; x : a); t; b) \cup \{a \rightarrow b \doteq \alpha\} \text{ mit } a, b \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma; ts; \alpha) = PT(\Gamma; t; a \rightarrow \alpha) \cup PT(\Gamma; s; a) \text{ mit } a \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma; (\text{let } x = s \text{ in } t); \alpha) = PT(\Gamma\sigma, x : Cl(\Gamma\sigma, \sigma(b)); t; \alpha\sigma)$$

wobei $\sigma = mgu(PT(\Gamma; s; b))$ mit b frisch

Minimierung von deterministischen endlichen Automaten

1. Entferne aus Q alle nicht erreichbaren Zustände
2. Initialisiere R auf $\{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F \Leftrightarrow q_2 \in F\}$
3. Suche ein Paar $(q_1, q_2) \in R$ und einen Buchstaben $a \in \Sigma$ mit

$$(\delta(a, q_1), \delta(a, q_2)) \notin R$$

Wenn kein solches Paar gefunden wird, gehe zu Schritt 4. Andernfalls entferne (q_1, q_2) aus R und fahre bei 3. fort.

4. Identifiziere alle Zustandspaare in R .

Unifikationsalgorithmus (Martelli/Montanari)

$S \cup \{x \doteq x\}$	$\rightarrow S$	(delete)
$S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq f(D_1, \dots, D_n)\}$	$\rightarrow S \cup \{E_1 \doteq D_1, \dots, E_n \doteq D_n\}$	(decomp)
$S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq g(D_1, \dots, D_k)\}$	$\rightarrow \perp$ (für $f \neq g$)	(conflict)
$S \cup \{E \doteq x\}$	$\rightarrow S \cup \{x \doteq E\}$ (für E keine Variable)	(orient)
$S \cup \{x \doteq E\}$	$\rightarrow \begin{cases} \perp & (\text{für } x \in FV(E), x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \doteq E\} & (\text{für } x \notin FV(E), x \in FV(S)) \end{cases}$	(occurs)/(el)

Notation

- Applikation ist links-assoziativ: $((x(yz))u)v = x(yz)uv$
- Abstraktion reicht so weit wie möglich: $\lambda x.(x(\lambda y.(yx))) = \lambda x.x(\lambda y.yx)$
- Aufeinanderfolgende Abstraktionen werden zusammengefasst: $\lambda x.\lambda y.\lambda z.yx = \lambda xyz.yz$

Definitionen aus der Übung

$$flip = \lambda f\ x\ y.f\ y\ x$$

$$const = \lambda x\ y.x$$

$$twice = \lambda f\ x.f\ (f\ x)$$

Church-Kodierung

$$true = \lambda x\ y.x$$

$$false = \lambda x\ y.y$$

$$if_then_else = \lambda b\ x\ y.b\ x\ y$$

$$pair\ a\ b = \lambda select.select\ a\ b$$

$$fst\ p = p\ (\lambda x\ y.x)$$

$$snd\ p = p\ (\lambda x\ y.y)$$

$$swap\ p = p\ (\lambda x\ y\ select.select\ y\ x)$$

$$zero = \lambda f\ a.a$$

$$succ\ n = \lambda f\ a.f\ (n\ f\ a)$$

$$add\ n\ m = \lambda f\ a.n\ f\ (m\ f\ a) = n\ succ\ m$$

$$mult\ n\ m = \lambda f\ a.n\ (m\ f)\ a = n\ (add\ m)\ 0$$

$$isZero\ n = n\ (\lambda x.false)\ true$$

$$odd\ n\ if\ (n == 0)\ then\ true\ else\ (not\ (odd\ n - \lceil 1 \rceil))$$

$$length\ Nil = 0$$

$$length\ (Cons\ x\ xs) = 1 + length(xs)$$

$$snoc\ Nil\ x = Cons\ x\ Nil$$

$$snoc\ (Cons\ x\ xs)\ y = Cons\ x\ (snoc\ xs\ y)$$

$$reverse\ Nil = Nil$$

$$reverse\ (Cons\ x\ xs) = snoc\ reverse(xs)\ x$$

$$drop\ y\ Nil = Nil$$

$$drop\ y\ (Cons\ x\ xs) = \begin{cases} drop\ y\ xs, & \text{falls } y = x \\ Cons\ x\ (drop\ y\ xs), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\textit{elem } y \textit{ Nil} = \textit{False}$$

$$\textit{elem } y \textit{ (Cons } x \textit{ xs)} = \begin{cases} \textit{True} , \text{ falls } x=y \\ \textit{elem } y \textit{ xs} , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\textit{minimum Nil} = 0$$

$$\textit{minimum (Cons } x \textit{ xs)} = \begin{cases} x , \text{ falls } \textit{minimum xs} = 0 \\ \min x \textit{ (minimum xs)} , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\textit{Nil} \oplus \textit{ys} = \textit{ys}$$

$$(\textit{Cons } x \textit{ xs}) \oplus \textit{ys} = \textit{Cons } x \textit{ (xs} \oplus \textit{ys)}$$