

Merkzettel für „Theorie der Programmierung“

Marco Ammon

10. Oktober 2018

Termersetzungssysteme

Terminierung

Sei $>$ Reduktionsordnung, und es gelte: $\forall t, s. t \rightarrow_0 s \Rightarrow t > s$. Dann ist \rightarrow stark normalisierend.

Satz 2.31 (15)

Polynomordnungen

Wir definieren $A \subseteq \mathbb{N}$ und für jede n -stellige Operation f ein Polynom $p_f(x_1, \dots, x_n)$. Wenn die linken Seiten der Umformungsregeln $>_A$ den rechten sind, ist das zugehörige TES stark normalisierend.

Kor. 2.44 (18)

Konfluenz

Critical Pairs

- Definition kritisches Paar:
Seien $l_1 \rightarrow_0 r_1$ und $l_2 \rightarrow r_2$ zwei Umformungsregeln des TES sowie $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$ (ggf. nach Umbenennung). Sei $l_1 = C(t)$, wobei t nicht nur eine Variable ist, so dass t und l_2 unifizierbar sind. Sei $\sigma = mgu(t, l_2)$. Dann heißt $(r_1\sigma, C(r_2)\sigma)$ ein kritisches Paar.
- Ein TES T ist genau dann lokal konfluent, wenn in T alle kritischen Paare zusammenführbar sind.
- Ein stark normalisierendes und lokal konfluentes TES ist konfluent.

Def. 2.55 (22)

Satz 2.60 (24)

Satz 2.51 (21)

λ -Kalkül

Ungetypt

- β -Reduktion

$$(\lambda x.t)s \rightarrow_{\beta} t[s/x]$$

- η -Reduktion

$$\lambda x.yx \rightarrow_{\eta} y$$

- α -Äquivalenz: $t_1 =_\alpha t_2$, wenn t_2 durch Umbenennung gebundener Variablen aus t_1 hervorgeht, formal:

Def. 3.6 (31)

$$\underbrace{\lambda x.u}_{t_1} =_\alpha \underbrace{\lambda y.u[y/x]}_{t_2} \quad \text{wenn } y \notin FV(u)$$

Auswertungsstrategien

- applikativ (*leftmost-innermost*) \rightarrow_a

Def. 3.13 (33)

- $\lambda x.t \rightarrow_a \lambda x.t'$, wenn $t \rightarrow_a t'$
- $ts \rightarrow_a t's$, wenn $t \rightarrow_a t'$
- $ts \rightarrow_a ts'$, wenn $s \rightarrow_a s'$ und t normal ist
- $(\lambda x.t)s \rightarrow_a t[s/x]$, wenn t und s normal sind
- effizient

- normal (*leftmost-outermost*) \rightarrow_n

Def. 3.14 (34)

- $(\lambda x.t)s \rightarrow_n t[s/x]$
- $\lambda x.t \rightarrow_n \lambda x.t'$, wenn $t \rightarrow_n t'$
- $ts \rightarrow_n t's$ wenn $t \rightarrow_n t'$ und t keine λ -Abstraktion ist
- $ts \rightarrow_n ts'$, wenn $s \rightarrow_n s'$ und t normal und keine λ -Abstraktion ist

- terminiert immer, falls Normalform existiert (nach Standardisierungssatz)

Satz 3.17 (35)

Einfach getypt ($\lambda \rightarrow$)

S. 39

- Church: Annotation der Variablen mit Typen, nur herleitbare Terme hinschreibbar
- Curry: Alle Terme hinschreibbar, dann Aussondern der nicht typisierbaren
- Typeregeln:

S. 39

$$(Ax) \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha} x : \alpha \in \Gamma$$

$$(\rightarrow_e) \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s : \alpha}{\Gamma \vdash ts : \beta}$$

$$(\rightarrow_i) \frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \alpha \rightarrow \beta}$$

- Typisierungsprobleme

S. 40

- Typcheck: „Gilt $\Gamma \vdash t : \alpha$?“
- Typinferenz: „Was ist das beste α / Existiert α mit $\Gamma \vdash t : \alpha$?“
- Type inhabitation: „Existiert t mit $\Gamma t : \alpha$?“

- Inversionslemma

Lem. 3.29 (41)

1. $\Gamma \vdash x : \alpha \Rightarrow x : \alpha \in \Gamma$
2. $\Gamma \vdash ts : \beta \Rightarrow \exists \alpha$ mit $\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash s : \alpha$
3. $\Gamma \vdash \lambda x.t : \gamma \Rightarrow \gamma = \alpha \rightarrow \beta$ mit $\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta$

- Typinferenz

S. 41

- Typsubstitution σ ist Lösung von $\Gamma \vdash t : \alpha$, wenn $\Gamma \sigma \vdash t : \alpha \sigma$ herleitbar

- Substitutionen: σ_1 allgemeiner als $\sigma_2 \Leftrightarrow \exists \tau. \sigma_1 \tau = \sigma_2$ *GLoIn, S. 38*
- Prinzipaltyp von Γ, t ist $\sigma(a)$ für allgemeinste Lösung σ von $\Gamma \vdash t : a$ (a frisch)
- Algorithmus W (Hindley/Milner) *Alg. 3.31 (42)*

* Menge PT von Typgleichungen

$$PT(\Gamma; x; \alpha) = \{\alpha \doteq \beta \mid x : \beta \in \Gamma\}$$

$$PT(\Gamma; \lambda x.t; \alpha) = PT((\Gamma; x : a); t; b) \cup \{a \rightarrow b \doteq \alpha\} \text{ mit } a, b \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma; ts; \alpha) = PT(\Gamma; t; a \rightarrow \alpha) \cup PT(\Gamma; s; a) \text{ mit } a \text{ frisch}$$

* Typinferenz des Terms u mit leerem Kontext:

$$\varepsilon := PT(\emptyset; u; a)$$

\Rightarrow Prinzipaltyp von u : $\text{mgu}(\varepsilon)(a)$

- Subjektreduktion: Wenn $\Gamma \vdash t : \alpha$ und $t \rightarrow_{\beta}^* s$, dann auch $\Gamma \vdash s : \alpha$, aber nicht umgekehrt! *Satz 3.38 (45)*

Induktive Datentypen

Mengenkonstruktionen

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 &= \{(x_1, x_2) \mid x_i \in X_i \text{ für } i = 1, 2\} && \text{„struct“} \\ X_1 + X_2 &= \{(i, x) \mid i = 1, 2, x \in X_i\} && \text{„union“} \\ 1 &= \{*\} && \text{„()“ in Haskell} \end{aligned}$$

Def. 4.12 (56)

Lem. 4.13 (57)

Seien $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $g_i : X_i \rightarrow Z$ und $h_i : Z \rightarrow X_i$ mit $i \in \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 &\rightarrow Y_1 \times Y_2, && (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \\ f_1 + f_2 : X_1 + X_2 &\rightarrow Y_1 + Y_2, && (f_1 + f_2)(i, x) = (i, f_i(x)) \\ [g_1, g_2] : X_1 + X_2 &\rightarrow Z, && [g_1, g_2](i, x) = g_i(x) \\ \langle h_1, h_2 \rangle : Z &\rightarrow X_1 \times X_2, && \langle h_1, h_2 \rangle(z) = (h_1(z), h_2(z)) \\ in_i : X_i &\rightarrow X_1 + X_2, && in_i(x) = (i, x) \\ \pi_i : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_i, && \pi_i(x_1, x_2) = x_i \\ 1 : 1 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [g_1, g_2] \circ in_i &= g_i \\ f_1 + f_2 &= [in_1 \circ f_1, in_2 \circ f_2] \\ [r \circ in_1, r \circ in_2] &= r \text{ für } r : X_1 + X_2 \rightarrow Z \\ \pi_i \circ \langle h_1, h_2 \rangle &= h_i \\ f_1 \times f_2 &= \langle f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2 \rangle \\ \langle \pi_i \circ f, \pi_2 \circ f \rangle &= f \text{ für } f : Z \rightarrow X_1 \times X_2 \end{aligned}$$

Strukturelle Induktion

- über einsortige Datentypen S. 63
 - Induktionsanfang: „Anfangs“-Konstruktor (etwa *Nil*)
 - Induktionsschritt: alle anderen Konstruktoren (etwa *cons*)
- über mehrsortige Datentypen S. 64
 - Funktionen müssen immer auf allen Datentypen definiert werden

Kodatentypen

- Definition über „Destruktoren“ etwa *hd* und *tl*

Koinduktion

- Bisimulation $R \subseteq A^\omega \times A^\omega$, wenn für alle $(s, t) \in R$ gilt: Def. 4.39 (74)

$$\begin{aligned} &hd\ s = hd\ t \\ &(tl\ s)\ R\ (tl\ t) \end{aligned}$$

- Wenn R eine Bisimulation ist, gilt $sRt \Rightarrow s = t$ Satz 4.40 (74)

System F

Curry

- Typen: Def. 5.1 (84)

$$\alpha, \beta := a \mid \alpha \rightarrow \beta \mid \forall a. \alpha \quad (a \in V)$$

- Typisierung: Def. 5.1 (84)

$$\begin{aligned} (Ax) &\frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha} (x : \alpha \in \Gamma) \\ (\rightarrow_e) &\frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s : \alpha}{\Gamma \vdash ts : \beta} \\ (\rightarrow_i) &\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. t : \alpha \rightarrow \beta} \\ (\forall_i) &\frac{\Gamma \vdash s : \alpha \quad a \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash s : \forall a. \alpha} \\ (\forall_e) &\frac{\Gamma \vdash s : \forall a. \alpha}{\Gamma \vdash s : (\alpha[\beta/a])} \end{aligned}$$

Church-Kodierung

S. 84

- Natürliche Zahlen

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \forall a.(a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow a \\ \text{zero} &: \mathbb{N} \\ \text{zero} &= \lambda f x.x \\ \text{suc} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \text{suc} &= \lambda n f x.f(n f x) \\ \text{fold} &: \forall a.(a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow a \\ \text{fold} &= \lambda f x n.n f x \\ \text{add} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \text{add} &= \lambda n.\text{fold suc } n\end{aligned}$$

- Paare

$$\begin{aligned}(a \times b) &:= \forall r.(a \rightarrow b \rightarrow r) \rightarrow r \\ \text{pair} &: \forall ab.a \rightarrow b \rightarrow (a \times b) \\ \text{pair} &= \lambda x y f.f x y \\ \text{fst} &: \forall ab.(a \times b) \rightarrow a \\ \text{fst} &= \lambda p.p(\lambda x y.x) \\ \text{snd} &: \forall ab.(a \times b) \rightarrow b \\ \text{snd} &= \lambda p.p(\lambda x y.y)\end{aligned}$$

- Summen

$$\begin{aligned}(a + b) &:= \forall r.(a \rightarrow r) \rightarrow (b \rightarrow r) \rightarrow r \\ \text{inl} &: \forall ab.a \rightarrow (a + b) \\ \text{inl} &= \lambda x f g.f x \\ \text{inr} &: \forall ab.b \rightarrow (a + b) \\ \text{inr} &= \lambda y f g.g y \\ \text{case} &: \forall abs.(a \rightarrow s) \rightarrow (b \rightarrow s) \rightarrow (a + b) \rightarrow s \\ \text{case} &= \lambda f g s.s f g\end{aligned}$$

- Listen

$$\begin{aligned}\text{List } a &:= \forall r.r \rightarrow (a \rightarrow r \rightarrow r) \rightarrow r \\ \text{Nil} &: \forall a.\text{List } a \\ \text{Nil} &= \lambda u f.u \\ \text{Cons} &: \forall a.a \rightarrow \text{List } a \rightarrow \text{List } a \\ \text{Cons} &= \lambda x l u f.f x(l u f) \\ \text{len} &: \forall a.\text{List } a \rightarrow \mathbb{N} \\ \text{len} &= \lambda l.l \text{ zero } (\lambda x r.\text{suc } r)\end{aligned}$$

ML-Polymorphie

- Einschränkung von System F durch \forall nur auf oberster Ebene sowie Mehrfachinstanziierung polymorpher Funktionen nur in *let*-Konstrukt

S. 88

- Typen

$$\alpha, \beta := a \mid \alpha \rightarrow \beta$$

- Typschemata

$$S := \forall a_1, \dots, a_k. \alpha \quad (k \geq 0)$$

- Terme

$$t, s := x \mid t s \mid \lambda x. t \mid \text{let } x = t \text{ in } s$$

- Kontexte

$$\Gamma = (x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n)$$

$$Cl(\Gamma, \alpha) = \forall a_1, \dots, a_k. \alpha \quad \text{für } FV(\alpha) \setminus FV(\Gamma) = \{a_1, \dots, a_k\}$$

- Typisierungsregeln

S. 88

$$(\forall_e) \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha[\beta_1/a_1, \dots, \beta_k/a_k]} (x : \forall a_1, \dots, \forall a_k. \alpha) \in \Gamma$$

$$(\rightarrow_i) \frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. t : \alpha \rightarrow \beta}$$

$$(\rightarrow_e) \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash s : \alpha}{\Gamma \vdash ts : \beta}$$

$$(\text{let}) \frac{\Gamma \vdash t : \alpha \quad \Gamma, x : Cl(\Gamma, \alpha) \vdash s : \beta}{\Gamma \vdash \text{let } x = t \text{ in } s : \beta}$$

- Inversionslemma

S. 89

1. Wenn $\Gamma \vdash x : \alpha$, dann existieren Typen β_i und ein Typschema $S = \forall a_1 \dots \forall a_k. \gamma$, so dass $(x : S) \in \Gamma$ und $\alpha = \gamma[\beta_1/a_1, \dots, \beta_k/a_k]$
2. Wenn $\Gamma \vdash (\text{let } x = s \text{ in } t) : \alpha$, dann existiert ein Typ β mit $\Gamma \vdash s : \beta$ und $\Gamma, x : Cl(\Gamma, \beta) \vdash t : \alpha$

- erweiterter Algorithmus W mit Menge PT von Typgleichungen

S. 90

$$PT(\Gamma; x; \alpha) = \{\alpha \doteq \gamma[a'_1/a_1, \dots, a'_k/a_k]\} \text{ mit } (x : \forall a_1, \dots, \forall a_k. \gamma) \in \Gamma$$

$$PT(\Gamma; \lambda x. t; \alpha) = PT((\Gamma; x : a); t; b) \cup \{a \rightarrow b \doteq \alpha\} \text{ mit } a, b \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma; ts; \alpha) = PT(\Gamma; t; a \rightarrow \alpha) \cup PT(\Gamma; s; a) \text{ mit } a \text{ frisch}$$

$$PT(\Gamma; (\text{let } x = s \text{ in } t); \alpha) = PT(\Gamma\sigma, x : Cl(\Gamma\sigma, \sigma(b)); t; \alpha\sigma)$$

wobei $\sigma = mgu(PT(\Gamma; s; b))$ mit b frisch

Minimierung von deterministischen endlichen Automaten

1. Entferne aus Q alle nicht erreichbaren Zustände
2. Initialisiere R auf $\{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F \Leftrightarrow q_2 \in F\}$
3. Suche ein Paar $(q_1, q_2) \in R$ und einen Buchstaben $a \in \Sigma$ mit

$$(\delta(a, q_1), \delta(a, q_2)) \notin R$$

Wenn kein solches Paar gefunden wird, gehe zu Schritt 4. Andernfalls entferne (q_1, q_2) aus R und fahre bei 3. fort.

4. Identifiziere alle Zustandspaare in R .

Unifikationsalgorithmus (Martelli/Montanari)

$S \cup \{x \doteq x\}$	$\rightarrow S$	(delete)
$S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq f(D_1, \dots, D_n)\}$	$\rightarrow S \cup \{E_1 \doteq D_1, \dots, E_n \doteq D_n\}$	(decomp)
$S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq g(D_1, \dots, D_k)\}$	$\rightarrow \perp$ (für $f \neq g$)	(conflict)
$S \cup \{E \doteq x\}$	$\rightarrow S \cup \{x \doteq E\}$ (für E keine Variable)	(orient)
$S \cup \{x \doteq E\}$	$\rightarrow \begin{cases} \perp \text{ (für } x \in FV(E), x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \doteq E\} \text{ (für } x \notin FV(E), x \in FV(S)) \end{cases}$	(occurs)/(eli)

Notation

- Applikation ist links-assoziativ: $((x(yz))u)v = x(yz)uv$
- Abstraktion reicht so weit wie möglich: $\lambda x.(x(\lambda y.(yx))) = \lambda x.x(\lambda y.yx)$
- Aufeinanderfolgende Abstraktionen werden zusammengefasst: $\lambda x.\lambda y.\lambda z.yx = \lambda xyz.yz$

Definitionen aus der Übung

$$flip = \lambda f x y.f y x$$

$$const = \lambda x y.x$$

$$twice = \lambda f x.f (f x)$$

$$true = \lambda x y.x$$

$$false = \lambda x y.y$$

$$if_then_else = \lambda b x y.b x y$$

$$pair a b = \lambda select.select a b$$

$$fst p = p (\lambda x y.x)$$

$$snd p = p (\lambda x y.y)$$

$$swap p = p (\lambda x y.select.select y x)$$

$$zero = \lambda f a.a$$

$$succ n = \lambda f a.f (n f a)$$

$$add n m = \lambda f a.n f (m f a) = n succ m$$

$$mult n m = \lambda f a.n (m f) a = n (add m) 0$$

$$isZero n = n (\lambda x.false) true$$

$$odd n \text{ if } (n == 0) \text{ then } true \text{ else } (not (odd n - [1]))$$

$$length Nil = 0$$

$$length (Cons x xs) = 1 + length(xs)$$

$$snoc Nil x = Cons x Nil$$

$$snoc (Cons x xs) y = Cons x (snoc xs y)$$

$$\begin{aligned} \text{reverse } Nil &= Nil \\ \text{reverse } (Cons\ x\ xs) &= \text{snoc } \text{reverse}(xs)\ x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{drop } y\ Nil &= Nil \\ \text{drop } y\ (Cons\ x\ xs) &= \begin{cases} \text{drop } y\ xs, & \text{falls } y = x \\ Cons\ x\ (\text{drop } y\ xs), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{elem } y\ Nil &= False \\ \text{elem } y\ (Cons\ x\ xs) &= \begin{cases} True, & \text{falls } x=y \\ \text{elem } y\ xs, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimum } Nil &= 0 \\ \text{minimum } (Cons\ x\ xs) &= \begin{cases} x, & \text{falls } \text{minimum } xs = 0 \\ \min\ x\ (\text{minimum } xs), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Nil \oplus ys &= ys \\ (Cons\ x\ xs) \oplus ys &= Cons\ x\ (xs \oplus ys) \end{aligned}$$